1.6 Diferansiyel Denklemlerin Seri Çözümleri

Tanım: x değişken ve a_n ler sabit olmak üzere x_0 noktasının **kuvvet serisi**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \qquad \cdots (21)$$

şeklindedir. x_0'a **açılımın merkezi** denir.

x_0 merkezli kuvvet serisi $x = x_0$ da yakınsaktır ve bu noktadaki toplamı a_0 dır. Bir kuvvet serisi ya bir x için ya da tüm x noktaları için yakınsak olabilir. Bunun dışında seri $|x-x_0| < R$ için mutlak yakınsak, $|x-x_0| > R$ için ıraksak olduğu bir $R > 0$ sayısı vardır ve bu R sayısına **serinin yakınsaklık yarıçapı** denir. (x_0-R, x_0+R) aralığına serinin **yakınsaklık aralığı** denir.

Kuvvet serilerinin yakınsaklığı için oran testinden

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x-x_0|$$ olmak üzere $L<1$ ise seri yakınsak, $L>1$ ise seri ıraksak olacaktır. Buna göre serinin yakınsaklık yarıçapı

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad , \quad (0 \le R \le \infty)$$

dır.

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\dots$ geometrik serisi $|x|<1$ için yakınsak ve $|x|>1$ için ıraksak olup $R=1$ dir.

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad -1<x<1$$

şeklinde yazılabilir. Yani sonsuz toplam $(-1,1)$ aralığında $\frac{1}{1-x}$'e yakınsar.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad , \quad R=\infty$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad R=\infty$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad R=\infty$$ şeklindedir.

Tanım: x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta bir f fonksiyonu $R>0$ yakınsaklık yarıçapına sahip olan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ şeklinde bir kuvvet serisinin toplamı ise bu fonksiyona x_0 da **analitiktir** denir. Yani kuvvet seri açılımı elde edilen özel fonksiyonlara analitik fonk denir.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu x_0 da analitik ise $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ sağlanır.

Şimdi de polinom katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin kuvvet serisi çözümlerini elde etmek için bir yöntem vereceğiz.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

diferansiyel denklemini $p_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$, $p_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$, ..., $p_n(x) = \frac{a_n(x)}{a_0(x)}$

olmak üzere

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad \cdots (22)$$

formunda ele alalım.

Tanım: (22) denklemindeki $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ fonksiyonları $x = x_0$ noktasında analitik ise x_0 noktasına denklemin **adi noktası** denir. Eğer x_0 adi nokta değilse denklemin **singüler (tekil) noktasıdır.**

Örnek: $(x^2-1)y'' + xy' + (x+1)y = 0$ denklemi için

$$p_1(x) = \frac{x}{x^2-1}, \quad p_2(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$$ dir.

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$ in analitikliğini bozan noktalar singüler noktalardır.
Bu durumda p_1 ve p_2 paydanın sıfır olduğu yerler hariç her yerde analitiktir.

Buna göre $p_1(x)$, $x = \mp 1$ hariç her yerde analitiktir.

$p_2(x)$, $x = 1$ hariç her yerde analitiktir.

O halde $x_0 = \mp 1$ noktaları denklemin singüler noktaları, $x_0 \neq \mp 1$ noktaları adi noktalarıdır.

Örnek: $y' + 2xy = 0$ denkleminin $x=0$ civarında kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

$p_1(x) = 2x$ olup her yerde analitik olduğu $x=0$ noktası denklemin adi noktasıdır. Kuvvet serisi çözümü:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

formunda arayabiliriz. Amacımız a_n katsayılarını belirlemektir.

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$ olup

$$y'+2xy=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n a_n x^{n-1}}_{\substack{x^0,\,x^1,\,x^2,\dots \\ n\to n+1}} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n x^{n+1}}_{\substack{x^1,\,x^2,\,x^3,\dots \\ n\to n-1}} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1)a_{n+1}x^n}_{x^0,\,x^1,\dots} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_{n-1}x^n}_{x^1,\,x^2,\dots} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1}\right\}x^n = 0$$ elde edilir.

Kuvvet serisinin toplamı bir aralıkta her x için sıfır ise, kuvvet serisinin tüm katsayıları sıfır olacağından

$$a_1 = 0$$

$(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$ dır. Buna indirgeme bağıntısı denir. Buradan

$$a_{n+1} = \frac{-2}{n+1} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad \text{yazılabilir.}$$

$n=1$ için $\quad a_2 = -\frac{2}{2} a_0 = -a_0$

$n=2$ için $\quad a_3 = -\frac{2}{3} a_1 = 0$

$n=3$ için $\quad a_4 = -\frac{2}{4} a_2 = -\frac{1}{2}(-a_0) = \frac{1}{2} a_0$

$n=4$ için $\quad a_5 = -\frac{2}{5} a_3 = 0$

$n=5$ için $\quad a_6 = -\frac{2}{6} a_4 = -\frac{1}{3} \frac{1}{2} a_0 = -\frac{1}{3!} a_0$

$n=6$ için $\quad a_7 = -\frac{2}{7} a_5 = 0$

$n=7$ için $\quad a_8 = -\frac{2}{8} a_6 = -\frac{1}{4} \frac{-1}{3!} a_0 = \frac{1}{4!} a_0$

O halde genellersek

$a_{2n+1} = 0$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!} a_0$ olmaktadır. Buna göre

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \underset{0}{\cancel{a_1}} x + a_2 x^2 + \underset{0}{\cancel{a_3}} x^3 + a_4 x^4 + \underset{0}{\cancel{a_5}} x^5 + \cdots$$

$$= a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{n!} x^{2n} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

kuvvet serisi çözümü elde edilir. Denklem birinci mertebeden olduğu için genel çözüm a_0 şeklinde bir parametreye bağlı elde edilir. Kuvvet serisi

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğundan $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ olup

$y(x) = a_0 e^{-x^2}$ fonksiyonuna yakınsamaktadır.

Örnek: $2y'' + xy' + y = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$p_1(x) = \frac{x}{2}$, $p_2(x) = \frac{1}{2}$ fonksiyonları her yerde analitik olduğundan $x=0$ adi nokta olup seri çözüm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda aranabilir.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \text{olup}$$

$$2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$n \to n+2$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$x^0, x^1, x^2, \ldots \qquad x^1, x^2, \ldots \qquad x^0, x^1, \ldots$

$$\Rightarrow 2.2.1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$4a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n \right\} x^n = 0$$

elde edilir. Buradan

$$4a_2 + a_0 = 0 \quad \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{4} a_0$$

$2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0 \quad , n \geq 1$ indirgeme bağıntısı bulunur.

$$a_{n+2} = -\frac{1}{2(n+2)} a_n \quad , \quad n \geq 1 \quad \text{dir.}$$

$$n=1 \Rightarrow \quad a_3 = \frac{-1}{2\cdot 3} a_1$$

$$n=2 \Rightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{2\cdot 4} a_2 = \frac{-1}{2\cdot 4} \frac{-1}{4} a_0 = \frac{1}{2^2 \cdot} \frac{1}{2\cdot 4} a_0 = \frac{1}{2^3 \cdot 1\cdot 2} a_0$$

$$n=3 \Rightarrow \quad a_5 = \frac{-1}{2\cdot 5} a_3 = \frac{-1}{2\cdot 5} \frac{-1}{2\cdot 3} a_1 = \frac{1}{2^2\cdot 3\cdot 5} a_1$$

$$n=4 \Rightarrow \quad a_6 = \frac{-1}{2\cdot 6} a_4 = \frac{-1}{2\cdot 6} \frac{1}{2^2\cdot 2\cdot 4} a_0 = \frac{-1}{2^3\, 2\cdot 4\cdot 6} a_0 = \frac{-1}{2^4\, 1\cdot 2\cdot 3} a_0$$

$$n=5 \Rightarrow \quad a_7 = \frac{-1}{2\cdot 7} a_5 = \frac{-1}{2\cdot 7} \frac{1}{2^2\, 3\cdot 5} a_1 = \frac{-1}{2^3\, 3\cdot 5\cdot 7} a_1$$

Genellersek

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}\, n!}\, a_0 \,, \quad n \geq 1$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^n\,(1.3.5 \ldots (2n+1))}\, a_1 \,, \quad n \geq 1$$ şeklindedir.

Çözüm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\, n!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\,(1.3.5 \ldots (2n+1))} x^{2n+1}$$

şeklinde a_0 ve a_1 iki keyfi sabitine bağlı olarak elde edilir.